



## **TOURNOI MATHEMATIQUE DU LIMOUSIN**

IREM, 123 avenue Albert Thomas  
87060 Limoges CEDEX

*Le plaisir de chercher*



# 2018

**Mardi 23 janvier**  
**TOURNOI dans les classes de lycée**

**Samedi 26 mai**  
**REMISE DES PRIX**  
*sous la présidence de Monsieur le Recteur*

Le Tournoi Mathématique du Limousin a été créé par :

- la Régionale de Limoges de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public ;
- le Département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges ;
- l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Limoges ;
- l'Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques de Limoges.

### Quelques recommandations:

Vous travaillez à plusieurs dans une même salle, pensez à respecter le travail des autres.

Vous pouvez parler avec votre équipier, mais ... **sans faire de bruit.**

Pensez qu'**il faut justifier** vos réponses.

Les calculatrices sont autorisées.

Chaque équipe remet une seule copie. **Ecrivez en majuscules vos noms et prénoms** en tête de la copie, ainsi que **vos classe, votre section** et le nom de **vos établissement.**

Pour chacun des textes composant le sujet, vous ne devez pas hésiter à proposer

- éventuellement plusieurs démonstrations,
- des solutions partielles, des prolongements,
- de nouvelles questions, même si vous n'y répondez pas ...

Bref, place à votre imagination créatrice, aux idées même insolites et au plaisir de chercher.

*Avoir le comportement du chercheur c'est :*

*essayer, expérimenter, conjecturer, induire, déduire, relier, trouver, douter, critiquer, généraliser, modéliser, conceptualiser, schématiser, formaliser ...*

*Bonne chance à vous tous, Chevaliers du Tournoi !*

*Le corrigé du Tournoi Mathématique du Limousin sera disponible dès la fin des épreuves sur le site de l'IREM de Limoges : [www.unilim.fr/irem/](http://www.unilim.fr/irem/)*

### **Bien divisibles**

1) Un entier  $N$  s'écrit avec les chiffres 1, 2 et 3 (une fois chacun) dans un certain ordre. Déterminer  $N$  sachant que pour  $k=2$  et  $k=3$  l'entier formé par les  $k$  premiers chiffres de  $N$  (en commençant par la gauche) est divisible par  $k$ .

2) Existe-t-il un entier  $N$  s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 (une fois chacun) dans un certain ordre tel que pour  $k=2$ ,  $k=3$  et  $k=4$  l'entier formé par les  $k$  premiers chiffres de  $N$  (en commençant par la gauche) est divisible par  $k$  ?

3) Quels sont les entiers  $N$  s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que pour  $k=2$ ,  $k=3$ ,  $k=4$ ,  $k=5$  et  $k=6$  l'entier formé par les  $k$  premiers chiffres de  $N$  (en commençant par la gauche) est divisible par  $k$  ?

4) Quels sont les entiers  $N$  s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que pour  $k=2$ ,  $k=3$ ,  $k=4$ ,  $k=5$ ,  $k=6$ ,  $k=7$  et  $k=8$  l'entier formé par les  $k$  premiers chiffres de  $N$  (en commençant par la gauche) est divisible par  $k$  ?

## Sans les multiples de 3

On écrit les entiers sauf les multiples de 3 comme l'indique le schéma suivant :

```

...
      22 ...
    14 20 ...
  8 13 19 ...
4 7 11 17 25
1 2 5 10 16 23
```

Le nombre 17 est placé sur la 5<sup>e</sup> colonne et au 2<sup>e</sup> rang de cette colonne en partant du bas.  
Sur quelle colonne sera placé le nombre 2018 et quel sera son rang ?

On admet que  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

## Tableaux symétriques

On veut former un tableau à  $n$  lignes et  $n$  colonnes, symétrique par rapport à sa première diagonale (celle qui débute en haut à gauche), de première ligne composée des nombres  $1, 2, \dots, n$  dans cet ordre, les autres lignes étant des permutations de la première ligne.

Par exemple les permutations de  $(1 ; 2 ; 3)$  sont  $(1 ; 2 ; 3)$ ,  $(1 ; 3 ; 2)$ ,  $(2 ; 1 ; 3)$ ,  $(2 ; 3 ; 1)$ ,  $(3 ; 1 ; 2)$  et  $(3 ; 2 ; 1)$ .

- 1) Montrez qu'il y a une seule possibilité pour  $n=2$  et  $n=3$ .
- 2) Trouvez toutes les possibilités pour  $n=4$ .
- 3) Parmi les cas précédents, dans quels cas la première diagonale est-elle une permutation de  $(1, 2, \dots, n)$  ?
- 4) Généralisation : montrez que, si  $n$  est impair, la première diagonale est toujours une permutation de  $(1, 2, \dots, n)$  alors que, si  $n$  est pair, la première diagonale n'est jamais une permutation de  $(1, 2, \dots, n)$ .

## Carrés et cubes parfaits

- 1) Combien y a-t-il de **carrés** parfaits, c'est-à-dire de **carrés** de nombres entiers, dans la suite de nombres :  $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \dots, 2018^{2018}$  ?
- 2) Combien y a-t-il de **cubes** parfaits, c'est-à-dire de **cubes** de nombres entiers, dans cette même suite ?
- 3) Sachant qu'il y a exactement 2018 **carrés** parfaits dans la suite de nombres  $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \dots, n^n$ , quelles sont les valeurs possibles pour l'entier  $n$  ?

## **Avec le soutien :**

- du Rectorat de l'Académie de Limoges,
- du Conseil Régional de la Nouvelle-Aquitaine,
- des Conseils Départementaux de la Corrèze et de la Creuse,
- de l'Université de Limoges,
- de la Faculté des Sciences et Techniques de Limoges,
- du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges,
- de l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation de l'Académie de Limoges,
- de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public,
- de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Limoges,
- du Comité International des Jeux Mathématiques,
- des Calculatrices CASIO,
- des Calculatrices Texas Instrument,
- de l'Association Limousine des Sports Aériens,
- de Récréasciences CCSTI,
- des éditions Pole-Tangente,
- de la MAIF et de la MGEN,
- de la librairie Page et Plume de Limoges,
- de la librairie Anecdotes,
- du Bowling Club Limousin et du Bowling de Brive,
- de la patinoire de Limoges et de l'Aquapolis (Vert Marine),
- du Laser Game Evolution de Limoges,
- des madeleines Bijou,
- de la Fédération des œuvres laïques de la Haute-Vienne,
- de l'Association des anciens élèves et fonctionnaires du Lycée Léonard-Limosin,
- de Tarz en Arbre Limoges,
- des Kartings de Pageas, de Lubersac et de Limoges (RMT),
- du service des sports de la ville de Limoges (entrées piscine et mini golf)

**Tournoi Mathématique du Limousin    123, avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex**