



TOURNOI MATHEMATIQUE DU LIMOUSIN

IREM, 123 avenue Albert Thomas
87060 Limoges CEDEX

Le plaisir de chercher



2018

Mardi 23 janvier
TOURNOI dans les classes de lycée

Samedi 26 mai
REMISE DES PRIX
sous la présidence de Monsieur le Recteur

Le Tournoi Mathématique du Limousin a été créé par :

- la Régionale de Limoges de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public ;
- le Département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges ;
- l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Limoges ;
- l'Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques de Limoges.

Quelques recommandations:

Vous travaillez à plusieurs dans une même salle, pensez à respecter le travail des autres.

Vous pouvez parler avec votre équipier, mais ... **sans faire de bruit.**

Pensez qu'**il faut justifier** vos réponses.

Les calculatrices sont autorisées.

Chaque équipe remet une seule copie. **Ecrivez en majuscules vos noms et prénoms** en tête de la copie, ainsi que **vos classe, votre section** et le nom de **vos établissement.**

Pour chacun des textes composant le sujet, vous ne devez pas hésiter à proposer

- éventuellement plusieurs démonstrations,
- des solutions partielles, des prolongements,
- de nouvelles questions, même si vous n'y répondez pas ...

Bref, place à votre imagination créatrice, aux idées même insolites et au plaisir de chercher.

Avoir le comportement du chercheur c'est :

essayer, expérimenter, conjecturer, induire, déduire, relier, trouver, douter, critiquer, généraliser, modéliser, conceptualiser, schématiser, formaliser ...

Bonne chance à vous tous, Chevaliers du Tournoi !

Le corrigé du Tournoi Mathématique du Limousin sera disponible dès la fin des épreuves sur le site de l'IREM de Limoges : www.unilim.fr/irem/

Bien divisibles

1) Un entier N s'écrit avec les chiffres 1, 2 et 3 (une fois chacun) dans un certain ordre. Déterminer N sachant que pour $k=2$ et $k=3$ l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k .

2) Existe-t-il un entier N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 (une fois chacun) dans un certain ordre tel que pour $k=2$, $k=3$ et $k=4$ l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

3) Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que pour $k=2$, $k=3$, $k=4$, $k=5$ et $k=6$ l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

4) Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que pour $k=2$, $k=3$, $k=4$, $k=5$, $k=6$, $k=7$ et $k=8$ l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

Sans les multiples de 3

On écrit les entiers sauf les multiples de 3 comme l'indique le schéma suivant :

```

...
      22 ...
    14 20 ...
  8 13 19 ...
4 7 11 17 25
1 2 5 10 16 23
```

Le nombre 17 est placé sur la 5^e colonne et au 2^e rang de cette colonne en partant du bas.
Sur quelle colonne sera placé le nombre 2018 et quel sera son rang ?

On admet que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tableaux symétriques

On veut former un tableau à n lignes et n colonnes, symétrique par rapport à sa première diagonale (celle qui débute en haut à gauche), de première ligne composée des nombres $1, 2, \dots, n$ dans cet ordre, les autres lignes étant des permutations de la première ligne.

Par exemple les permutations de $(1 ; 2 ; 3)$ sont $(1 ; 2 ; 3)$, $(1 ; 3 ; 2)$, $(2 ; 1 ; 3)$, $(2 ; 3 ; 1)$, $(3 ; 1 ; 2)$ et $(3 ; 2 ; 1)$.

- 1) Montrez qu'il y a une seule possibilité pour $n=2$ et $n=3$.
- 2) Trouvez toutes les possibilités pour $n=4$.
- 3) Parmi les cas précédents, dans quels cas la première diagonale est-elle une permutation de $(1, 2, \dots, n)$?
- 4) Généralisation : montrez que, si n est impair, la première diagonale est toujours une permutation de $(1, 2, \dots, n)$ alors que, si n est pair, la première diagonale n'est jamais une permutation de $(1, 2, \dots, n)$.

Carrés et cubes parfaits

- 1) Combien y a-t-il de **carrés** parfaits, c'est-à-dire de **carrés** de nombres entiers, dans la suite de nombres : $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \dots, 2018^{2018}$?
- 2) Combien y a-t-il de **cubes** parfaits, c'est-à-dire de **cubes** de nombres entiers, dans cette même suite ?
- 3) Sachant qu'il y a exactement 2018 **carrés** parfaits dans la suite de nombres $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \dots, n^n$, quelles sont les valeurs possibles pour l'entier n ?

Avec le soutien :

- du Rectorat de l'Académie de Limoges,
- du Conseil Régional de la Nouvelle-Aquitaine,
- des Conseils Départementaux de la Corrèze et de la Creuse,
- de l'Université de Limoges,
- de la Faculté des Sciences et Techniques de Limoges,
- du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges,
- de l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation de l'Académie de Limoges,
- de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public,
- de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Limoges,
- du Comité International des Jeux Mathématiques,
- des Calculatrices CASIO,
- des Calculatrices Texas Instrument,
- de l'Association Limousine des Sports Aériens,
- de Récréasciences CCSTI,
- des éditions Pole-Tangente,
- de la MAIF et de la MGEN,
- de la librairie Page et Plume de Limoges,
- de la librairie Anecdotes,
- du Bowling Club Limousin et du Bowling de Brive,
- de la patinoire de Limoges et de l'Aquapolis (Vert Marine),
- du Laser Game Evolution de Limoges,
- des madeleines Bijou,
- de la Fédération des œuvres laïques de la Haute-Vienne,
- de l'Association des anciens élèves et fonctionnaires du Lycée Léonard-Limosin,
- de Tarz en Arbre Limoges,
- des Kartings de Pageas, de Lubersac et de Limoges (RMT),
- du service des sports de la ville de Limoges (entrées piscine et mini golf)

Tournoi Mathématique du Limousin 123, avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex